Dynamics of the Lorenz-96 model

van Kekem, Dirk Leendert

Publication date:
2018

SAMENVATTING

Deze dissertatie is het resultaat van het analyseren van het Lorenz-96 model. We zullen eerst kort de context van dit model en het doel van ons onderzoek schetsen voordat we een overzicht geven van de resultaten van ons onderzoek.

S.1 ONS ONDERZOEK

Dit proefschrift behandelt het Lorenz-96 model, een testmodel geconstrueerd door Edward Lorenz (1917–2008) om de voorspelbaarheid van de atmosfeer te bestuderen. Het was niet zijn doel om een gecompliceerd en realistisch model te ontwerpen, maar een simpel model, dat gemakkelijk te gebruiken is in numerieke experimenten. Dit model is zo opgezet dat het tot één van de eenvoudigste niet-triviale dynamische systemen behoort die chaotisch gedrag kunnen vertonen. Het beschrijft — hoewel zeer sterk vereenvoudigd — het gedrag van een atmosferische grootheid (bijvoorbeeld temperatuur of luchtdruk) gemeten op een cirkel van constante breedtegraad van de aarde. Deze cirkel is verdeeld in n gelijke sectoren, met voor elke sector een andere variabele, x_j, zodat de index $j = 1, \ldots, n$ de lengtegraad aangeeft. Op deze manier verkrijgen we een n-dimensionaal model, waarbij n — een natuurlijk getal — de dimensie weergeeft. Het systeem kunnen we beschrijven met een enkele vergelijking voor elke variabele:

$$\dot{x}_j = x_{j-1}(x_{j+1} - x_{j-2}) - x_j + F, \tag{S.1}$$

met j zodanig dat $j = 1, \ldots, n$. Vanwege de cirkel moet ook de volgende randvoorwaarde gelden:

$$x_{j-n} = x_{j+n} = x_j.$$

Vanwege deze opzet kunnen we het Lorenz-96 model interpreteren als een model dat golven in de atmosfeer beschrijft. Hierin zijn de volgende fysische mechanismen aanwezig: advectie (de kwadratische termen), demping (de lineaire term) en externe aandrijving (F).

Het Lorenz-96 model (S.1) is eigenlijk een *familie* van dynamische systemen, geparametriseerd door de discrete parameter $n \in \mathbb{N}$. Het hoofddoel van ons onderzoek is het begrijpen van de dynamica van deze familie van systemen. Omdat de dynamische eigenschappen en bifurcaties hierin heel sterk af kunnen hangen van de dimensie, vraagt onze onderzoeksvraag in het bijzonder welke bifurcaties behouden blijven in elke dimensie en welke dynamische eigenschappen stabiliseren in de limiet $n \to \infty$:

Onderzoeksvraag. *Hoe hangen de kwantitatieve en kwalitatieve eigenschappen van de dynamica van het Lorenz-96 model* (S.1) *af van de dimensie $n \in \mathbb{N}$?*

Om deze vraag te beantwoorden, hebben we de symmetrie van het model geanalyseerd en — met behulp van deze symmetrieën — de bifurcaties van de stabiele aantrekkers bestudeerd, waarbij we gebruik hebben gemaakt van zowel analytische als numerieke methoden. Op deze manier hebben we een volledig overzicht verkregen van de transitie van het stabiele evenwicht via verschillende bifurcaties naar een of meer stabiele periodieke banen voor elke mogelijke dimensie. Daarnaast hebben we de spatiotemporele eigenschappen van deze golven onderzocht, alsmede de routes naar chaos voor positieve parameterwaarden.

Onze bijdrage vergroot het begrip van de dynamica van het Lorenz-96 model. Dit is onder andere van belang bij het kiezen van de juiste parameterwaarden in specifieke toepassingen van het model. Ook laat het zien dat het model niet verkregen kan worden door een partiële differentiaalvergelijking te discretiseren.

Hieronder geven we een kort overzicht van de belangrijkste bevindingen van ons onderzoek, die onze hoofdvraag grotendeels beantwoorden.

S.2 ONZE RESULTATEN

SYMMETRIEËN Allereerst is het Lorenz-96 model in elke dimensie equivariant ten opzichte van een cyclische verschuiving van de coördinaten. Dit geeft een symmetrie-groep die isomorf is met $\mathbb{Z}_n$. Deze groep heeft voor elke deler m van de dimensie n een subgroep, welke zorgt voor een invariante variëteit of deelruimte. De dimensie van deze invariante deelruimten — genoteerd als $\mathrm{Fix}(G_n^m)$ — is precies m.

Een belangrijk resultaat van hoofdstuk 2 is dat de invariante deelruimten ons in staat stellen om resultaten die bewezen zijn voor een bepaalde dimensie n te extrapoleren naar alle veelvouden van n. Hier moet echter wel bij gezegd worden dat deze methode alleen het bifurcatiepatroon en de route naar chaos geeft in de deelruimte $\mathrm{Fix}(G_{kn}^n)$ voor alle veelvouden kn van de dimensie n. In dit geval hebben we dus altijd te maken met een symmetrische aantrekker. Er kunnen twee problemen optreden bij het extrapoleren naar hogere dimensies:

- Het is mogelijk dat een andere bifurcatie eerder optreedt dan de geëxtrapoleerde bifurcatie, waardoor een afwijkende aantrekker stabiel wordt.
- Daarnaast kan er nog een aantrekker bestaan die geen of een andere symmetrie heeft met een andere route naar chaos.

Chaos kan in beide gevallen dus al voor kleinere parameterwaarden optreden. Bovengenoemde fenomenen zijn daadwerkelijk waargenomen in ons model, zoals we dat hebben beschreven in hoofdstuk 5. Het benutten van de invariante deelruimten vergroot — samen met de symmetrische aard van het Lorenz-96 model — ons begrip van het model en zijn dynamica.

BIFURCATIES EN GOLVEN VOOR $F > 0$ Ten tweede speelt het volledig symmetriche evenwicht $x_F = (F, \ldots, F)$ een cruciale rol in de dynamica voor parameterwaarden F dicht bij 0. In hoofdstuk 3 tonen we aan dat dit evenwicht voor zowel positieve als negatieve F zijn stabiliteit verliest en dat er één of meer stabiele periodieke aantrekkers ontstaan.

We bespreken eerst het geval $F > 0$. Voor $F > 0$ bewijzen we dat het evenwicht x_F één of meer Hopf en Hopf-Hopf bifurcaties ondergaat voor alle dimensies $n \geq 4$. Door een exacte formule op te stellen voor de eerste Lyapunov coëfficiënt hebben we aangetoond dat, wanneer de eerste bifurcatie voor $F > 0$ een Hopf bifurcatie is, deze dan superkritisch moet zijn. Deze formule geldt voor alle Hopf bifurcaties van x_F — inclusief de Hopf bifurcaties voor negatieve F — en voor alle dimensies n.

Uit een superkritische Hopf bifurcatie ontstaat een stabiele periodieke baan. In hoofdstuk 4 laten we zien dat de stabiele periodieke banen voor $F > 0$ de fysische interpretatie hebben van lopende golven. Hun ruimtelijke golfgetal is gelijk aan de index van het eigenwaarde-paar dat door de imaginaire as gaat en stijgt lineair met n. Hun periode convergeert echter naar een eindige waarde als $n \to \infty$.

De invloed van de symmetrie op de dynamica van de Lorenz-96 model voor positieve F is niet heel groot. De bovengenoemde Hopf en Hopf-Hopf bifurcaties zijn geen direct gevolg van de symmetrie. Aan de andere kant, een periodieke attractor heeft onder bepaalde omstandigheden een zekere symmetrie, namelijk wanneer zijn ruimtelijke golfgetal l een gemeenschappelijk deler heeft met de dimensie van het model, dat is $\text{ggd}(l, n) = g > 1$. In dat geval is de periodieke aantrekker bevat in de invariante deelruimte $\text{Fix}(G_n^{n/g})$. Het is in theorie mogelijk dat er meer symmetrie te vinden is voor andere evenwichten voor $F > 0$ dan x_F, maar het is over het algemeen niet gemakkelijk om zulke evenwichten te lokaliseren.

ORGANISEREND CENTRUM In hoofdstuk 3 bewijzen we een noodzakelijke en voldoende voorwaarde waaronder het evenwicht x_F een Hopf-Hopf bifurcatie ondergaat voor $F > 0$. Omdat een Hopf-Hopf bifurcatie eigenlijk een codimensie twee bifurcatie is, hebben we een extra parameter nodig om het type van de bifurcatie te kunnen bepalen en de dynamica rond het bifurcatiepunt te ontvouwen. Daarom hebben we het twee-parameter model (2.13) geïntroduceerd, waarbij de nieuwe parameter G aan het Lorenz-96 model is toegevoegd via een Laplace-achtige diffusieterm. Het oorspronkelijke Lorenz-96 model kan herkregen worden door $G = 0$ te stellen. Door de Hopf-Hopf bifurcatie op deze manier te ontvouwen zijn de oorspronkelijke Hopf bifurcatiepunten van het evenwicht x_F rechte lijnen geworden in het (F, G)-vlak. Op de snijpunten van deze lijnen vindt dan een Hopf-Hopf bifurcatie plaats. We laten zien dat zo'n codimensie twee bifurcatiepunt fungeert als een zogenoemd *organiserend centrum* in het oorspronkelijke model, wanneer het evenwicht x_F onstabiel wordt door het passeren van zo'n punt èn wanneer tegelijkertijd de parameterwaarde G dicht bij 0 ligt.

Dit kan heel mooi geïllustreerd worden aan de hand van het speciale geval, dimensie $n = 12$. In dit geval ligt de Hopf-Hopf bifurcatie op de lijn $G = 0$ en is zij ook precies de eerste bifurcatie die het evenwicht x_F ondergaat in het originele model voor $F > 0$. Analyse van de normaalvorm op het bifurcatiepunt toont aan dat twee Neimark-Sacker bifurcatiekrommen voortkomen uit het Hopf-Hopf-punt. In hoofdstuk 4 laten we zien dat deze twee krommen een lobvormig gebied in het (F, G)-vlak omgrenzen waarin twee stabiele lopende golven met een verschillend golfgetal naast elkaar bestaan voor dezelfde parameterwaarden. Dit gebied overlapt voor een deel ook de lijn $G = 0$, wat impliceert dat in het oorspronkelijke Lorenz-96 model ook multistabiliteit voorkomt: verschillende stabiele golven bestaan naast elkaar voor dezelfde parameterwaarden.

In het algemeen vinden we Hopf-Hopf bifurcaties *dicht bij* en aan weerszijden van de lijn $G = 0$ in alle dimensies $n > 12$. De twee Hopf-Hopf bifurcaties die het dichtst bij de F-as liggen, genereren twee gebieden met multistabiliteit die elkaar kunnen overlappen en zo leiden tot het gelijktijdig bestaan van drie stabiele golven voor $G = 0$ en in een interval van F-waarden. Op basis hiervan kunnen we concluderen dat het toevoegen van een extra parameter aan het Lorenz-96 model bijdraagt aan het verklaren van de dynamica die we waarnemen in het oorspronkelijke model.

BIFURCATIES EN GOLVEN VOOR $F < 0$ Voor $F < 0$ hangt het bifurcatiepatroon van de stabiele aantrekker veel meer af van de dimensie van het model, zoals we in hoofdstuk 3 hebben laten zien. Globaal zijn er drie verschillende gevallen te onderscheiden. Als eerste het geval van *oneven* dimensies, waarbij symmetrie geen rol speelt:

1. Voor oneven n is de eerste bifurcatie van het evenwicht x_F een superkritische Hopf bifurcatie, net als in het geval van positieve F — zie boven. De periodieke aantrekker die door deze bifurcatie ontstaat, is weer een lopende golf, waarvan het golfgetal gelijk is aan $(n-1)/2$ en de periode schaalt met $\mathcal{O}(4n)$.

De andere twee gevallen zijn beide voor *even* dimensies, waar de symmetrie een belangrijke rol speelt. Met behulp van een stelling over bifurcaties in $\mathbb{Z}_n$-equivariante dynamische systemen, hebben we analytisch aangetoond dat het evenwicht x_F een superkritische pitchfork (hooivork) bifurcatie ondergaat voor $n = 2$ met parameterwaarde $F = -\frac{1}{2}$. Door gebruik te maken van de invariante deelruimten kunnen we vaststellen dat in elke even dimensie een pitchfork bifurcatie plaatsvindt voor x_F, welke ook de eerste bifurcatie is voor $F < 0$. Na een superkritische pitchfork bifurcatie (geïnitieerd door symmetrie) ontstaan twee geconjugeerde stabiele evenwichten, die dezelfde eigenschappen hebben. Het verdere verloop van deze evenwichten bij een dalende F is weer afhankelijk van de dimensie, namelijk of deze deelbaar is door vier:

2. Wanneer $n = 4k+2$, voor een $k \in \mathbb{N}$, dan ondergaan beide evenwichten — die ontstaan zijn uit de eerste pitchfork bifurcatie op $F = -\frac{1}{2}$ — een superkritische Hopf bifurcatie.

3. Als $n = 4k$, voor een $k \in \mathbb{N}$, dan hebben de twee evenwichten na de eerste pitchfork bifurcatie nog genoeg symmetrie over, zodat zij een *tweede* pitchfork bifurcatie ondergaan op $F = -3$. Dit hebben we — met behulp van bovengenoemde stelling — aangetoond voor de laagst mogelijke dimensie, $n = 4$, en gegeneraliseerd door middel van de invariante deelruimten. Alle vier stabiele evenwichten die ontstaan uit deze tweede pitchfork bifurcatie ondergaan daarna een superkritische Hopf bifurcatie.

In even dimensies zijn er dus — al naar gelang er één of twee pitchfork bifurcaties hebben plaatsgevonden — twee of vier evenwichten die tegelijkertijd een Hopf bifurcatie ondergaan. Dit heeft tot gevolg dat er twee of vier stabiele periodieke aantrekkers naast elkaar ontstaan. We laten numeriek zien dat deze aantrekkers stationaire golven in het model representeren. De rol van de pitchfork bifurcatie is het veranderen van de gemiddelde stroom (mean flow), welke op zijn beurt de voortgang van de golf verandert. Met andere woorden, het voorkomen van pitchfork bifurcaties voor de Hopf bifurcatie leidt tot multistabiliteit. Dit is een tweede scenario waarin multistabiliteit voorkomt.

Numeriek onderzoek laat ook zien dat er meer pitchfork bifurcaties volgen als de dimensie deelbaar is door een grotere macht van twee dan vier. Zij n een willekeurige dimensie, die we op unieke wijze schrijven als $n = 2^q p$, waarbij q een niet-negatief geheel getal is en p oneven. Ons vermoeden is dan dat in het model van dimensie n het aantal van opeenvolgende pitchfork bifurcaties precies gelijk is aan q. Het is echter niet eenvoudig om dit resultaat analytisch te bewijzen, aangezien het niet haalbaar is om expliciete formule's op te stellen voor de evenwichten die ontstaan na ten minste twee pitchfork bifurcaties en bovendien is hun Jacobiaan niet langer circulant. Daarnaast wordt het bewijzen van dynamische eigenschappen na de l-de pitchfork bifurcatie steeds moeilijker, omdat de laagste dimensie waarin dit voorkomt gelijk is aan $n = 2^l$ en dus exponentieel stijgt met l. Aan de andere kant, als we eenmaal een evenwicht hebben gevonden in een bepaalde invariante deelruimte, dan garandeert de symmetrie het bestaan van een veelvoud aan geconjugeerde evenwichten met dezelfde eigenschappen.

PATRONEN Tenslotte onderzoeken we in hoofdstuk 5 de dynamica van het model numeriek voor dimensies tot en met $n = 100$ en positieve parameterwaarden. Hierbij richten we onze aandacht in het bijzonder op het lot van de periodieke aantrekker bij een steeds groter wordende F. Over het algemeen zijn er verschillende routes naar chaos, waaronder transities met intermittentie, periode-verdubbeling cascades en mogelijk Newhouse-Ruelle-Takens scenario's.

Voor de stabiele aantrekkers in dimensies $n = 5k$, $k = 1, \ldots, 10$, hebben we een patroon ontdekt: in elk van deze dimensies ondergaat zij een periode-verdubbeling bifurcatie. Dit fenomeen kunnen we verklaren met behulp van de invariante deelruimten. Echter, zoals we hierboven uitgelegd hebben, is het mogelijk dat er nog meer bifurcaties plaats vinden in hogere dimensies die ervoor zorgen dat een andere aantrekker stabiel wordt. Dat zien we in dit geval ook gebeuren, want voor $k = 11$ wordt het patroon doorbroken.

Daarnaast verdwijnt in dimensie $n = 4$ een periodieke aantrekker via een fold (vouw) bifurcatie voor periodieke banen. Na deze fold bifurcatie hebben we intermittentie gevonden, wat we zouden kunnen verklaren door een nabijgelegen heterocliene cyclus tussen vier evenwichten. Een soortgelijk bifurcatie scenario hebben we waargenomen voor de symmetrische aantrekker in $n = 8$, die tegelijk met een niet-symmetrische aantrekker bestaat. In het algemeen geldt dat symmetrische aantrekkers — die bevat zijn in $\mathrm{Fix}(G_n^m)$ — hun eigenschappen erven van de aantrekker in dimensie m. Op die manier zorgen zij er voor dat de dynamica zich herhaalt.